

## Distributed Solution of Road Lighting Problem Over Multi-Agent Networks

 Onur CİHAN

Marmara University, Faculty of Engineering, Department of Electrical and Electronics Engineering;  
onur.cihan@marmara.edu.tr; <https://orcid.org/0000-0002-5729-2417>; +90 216 777 3673

Received 7 April 2020; Revised 15 May 2020; Accepted 21 May 2020; Published online 28 August 2020

### Abstract

In this study, we consider the solution of the road lighting problem by distributed algorithms over multi-agent networks where the objective is to determine the powers of the lamps that provide the desired road lighting level for a given road profile. The road is modeled as multiple road sections each with a length of 50 meters where a lighting pole is located in the middle of each section. Under given assumptions, the illumination levels of the road sections are expressed as linear functions of the powers of the lamps. When the processing units in the lighting poles can communicate wirelessly with the neighboring processing units and make simple calculations, it is shown that the power levels of the lamps that provide the desired lighting level for each road section can be calculated in a distributed manner. Finally, the model and the proposed solution has been verified by a numerical example.

**Keywords:** multi-agent systems, distributed algorithms, distributed control, road illumination

## Yol Aydınlatma Probleminin Çok Etmenli Ağlarda Dağıtık Çözümü

### Öz

Bu çalışmada, verilen bir yol profili için yol aydınlatma düzeyinin istenilen değerlerde olmasını sağlayan lamba güçlerini belirleme probleminin çok etmenli sistemler üzerinde tanımlanan bir algoritma ile dağıtık çözümü ele alınmıştır. Söz konusu yol, ellişer metrelik uzunluğa sahip bölümler halinde modellenmiş ve her bir bölümün ortasında bir aydınlatma direği konumlandırılmıştır. Yapılan varsayımlar altında yol bölümlerinin aydınlanma düzeyleri, lambaların güçlerinin bir doğrusal fonksiyonu olduğu ifade edilmiştir. Aydınlatma direklerinde bulunan işlem birimlerinin kendilerine yakın olan direklerdeki işlem birimleriyle haberleşebildiği ve basit hesaplamalar yapabildiği durumda, yolun istenilen bir aydınlık seviyesine sahip olabilmesi için gerekli olan lamba gücü seviyelerinin, dağıtık olarak hesaplanabildiği gösterilmiş ve sayısal sonuçlar ile modelin ve çözümün geçerliği doğrulanmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** çok etmenli sistemler, dağıtık algoritmalar, dağıtık kontrol, yol aydınlatması

### 1. Giriş

Yolun yeterli ve doğru bir şekilde aydınlatılması, güvenli bir gece sürüşü için büyük öneme sahiptir. İstatistiklere göre doğru bir şekilde aydınlatılmamış bir yolda meydana gelen kaza oranı, gündüz meydana gelen kaza oranının üç katıdır [1]. Bunun yanı sıra, yolda seyir halinde bulunan araçların sürücülerinin konforlu bir sürüş deneyimi yaşayabilmeleri için, yolun aydınlık seviyesinin belirli bir değer aralığında ve parlıltı dağılımının homojene olabildiğince yakın olması istenmektedir [2]. Yol aydınlatmasının iyi olmadığı yerlerde yapılacak doğru bir aydınlatma ile trafik kazaları kayda değer oranda azaltılabilmektedir. Bu amaçla otoyol aydınlatma lambalarının konumlandırılmaları ve bu lambaların güçlerinin doğru şekilde ayarlanması büyük önem arz etmektedir.

Yol aydınlatma problemi, belirli varsayımlar altında bir doğrusal denklem olarak ifade edilebilmekte ve istenilen bir aydınlık seviyesini sağlayan lamba gücü değerleri bu denklemin çözümü olarak hesaplanabilmektedir. Ancak yolun belirli kısımlarının farklı düzeyde aydınlatılması istendiğinde, bu yeni denklem sisteminin çözülerek uygun lamba güçlerinin tekrar hesaplanması gerekmektedir. Bu

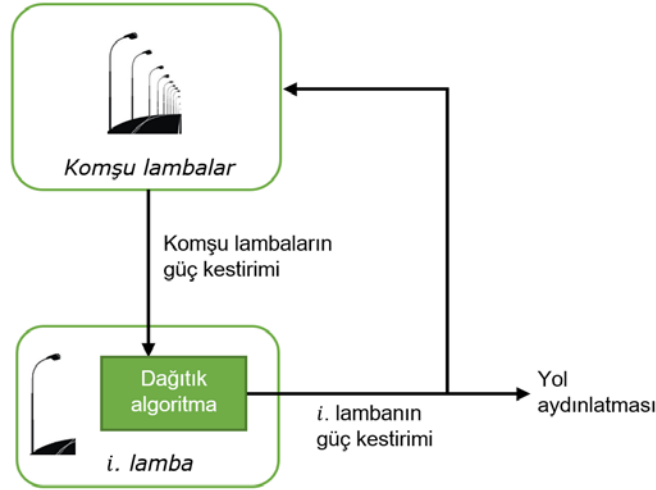
çalışmada, işlem birimleri ile güçleri kontrol edilebilen lambalara sahip bir otoyolun, istenilen aydınlık seviyesini sağlayacak şekilde, lamba güçlerini dağıtık olarak hesaplama mekanizması incelenmiştir. Bu amaçla, doğrusal denklem sistemlerinin çözümü için yeni bir yaklaşım olan ve çok etmenli sistemlerde kullanılan bir dağıtık algoritmadan yararlanılmıştır.

Literatürde doğrusal denklem sistemlerinin çözümü, araştırmacıların üzerinde çok uzun zamandır çalışılmakta olduğu ve birçok farklı mühendislik uygulamasında karşılaşılan önemli bir problemdir. Bu amaçla Jacobi yöntemi, Gauss-Seidel yöntemi, Kaczmarz yöntemi gibi birçok klasik algoritma başarı ile geliştirilmiştir [3]. Bu algoritmaların ortak özelliği, denklem sisteminin tamamının bilindiği varsayımına sahip olmalarıdır ve bu nedenle merkezleştirilmiş algoritmalar olarak adlandırılırlar. Ancak kısmi türevli diferansiyel denklemler [4], hesaplamalı akışkanlar dinamiği [5], elektromanyetik hesaplamaları [6], güç sistemleri tahminlemesi [7] ve arama motorları için geliştirilen pagerank algoritmaları [8] gibi birçok pratik uygulamada denklem sistemindeki bilinmeyen sayısı çok fazladır ve merkezleştirilmiş algoritmaların bu denklem sistemlerini çözmesi pratik değildir. Bunun yanında, doğrusal denklem sistemini oluşturan denklemler birbirinden çok farklı fiziksel konumlarda ortaya çıkabileceği için merkezleştirilmiş bir algoritmanın kullanılabilmesi için tüm denklemlerin merkezi işlemci tarafından tek bir yerde toplanması gerekmektedir.

Merkezleştirilmiş algoritmaların aksine, dağıtık algoritmalar çok fazla değişken sayısına sahip doğrusal denklem sistemlerinin çözümü için iyi bir alternatif olması nedeniyle son 10 yılda araştırmacılar tarafından çalışılmaktadır [7, 9-22]. Bu dağıtık algoritmalar, denklem sisteminin yalnızca bir kısmını içeren birden fazla sayıda alt sisteme ayırmakta ve her alt sistemin çok etmenli sistemleri oluşturan bir etmen tarafından ele alındığı ve komşu etmenlerle bilgi paylaşımı yaparak tüm denklem sisteminin çözümünü bulmalarını sağlamaktadır. Mou ve ark. tarafından, etmenlerin komşularıyla kendi alt sistemleri için ürettikleri çözümü paylaştıkları, komşularının çözümlerini de kullanarak çözümlerini güncelledikleri ve nihayetinde denklem sisteminin tamamına çözüm buldukları bir dağıtık algoritma önerilmiştir [9]. Bu algoritmanın başarısının ardından, ayrık zamanda [10-16] ve sürekli zamanda [17-21] benzer bilgi paylaşım kısıtları altında birçok algoritma geliştirilmiştir. Geliştirilen bu algoritmaların temel çalışma mantığı, her bir etmenin denklem sisteminin bir alt kümesine çözüm üretirken, komşu etmenlerin denklemleri ile çözümlerinde odayışım (konsensüs) sağlamaya çalışmalarıdır [22]. Denklem sisteminin katsayılar matrisinin seyrek matris olması durumunda etmenler arası bilgi paylaşımının daha etkin bir şekilde yapıldığı bir dağıtık algoritma [10]'da verilmiştir. Algoritmaların başlangıç çözümünün, denklem alt sistemini sağlayan bir çözüm olmak zorunda olmadığı, keyfi bir başlangıç vektörü seçimi ile denklem sisteminin çözülmesini sağlayan bir algoritma ise [11]'de önerilmiştir.

Literatürde önerilen algoritmaların birçoğu, doğrusal denklem sisteminin tek çözümü olduğu durumda çözümü bulmayı amaçlamaktadırlar. Ancak bir denklem sisteminin sonsuz çözümünün olması veya çözümsüz olması durumu da söz konusudur. Denklem sisteminin sonsuz çözümünün olduğu durumda en küçük Öklid normuna sahip olan çözümün bulunabilmesini sağlayan algoritmalar [11,12]'de geliştirilmişken, denklem sisteminin çözümü olmadığı durumda etmenlerin en küçük karesel hatayı sağlayan çözümü bulmasını sağlayan algoritmalar [13, 17]'de verilmiştir.

Bu makalede, verilen herhangi bir otoyol profili için istenilen aydınlık düzeyini sağlayacak olan lamba güçlerinin belirlenmesi problemi -literatürde yer alan merkezleştirilmiş hesaplama yöntemlerinden farklı olarak- çok etmenli ağlar üzerinden doğrusal denklem sistemlerinin çözümü için tasarlanmış dağıtık bir algoritma kullanılarak çözülmüştür. Önerilen sistemin genel işleyişi Şekil 1'de gösterilmiştir. Aydınlatma direklerinde kablosuz iletişim yeteneğine sahip olan akıllı lambaların her biri, iletişim menziline bulunan komşu lambalardan gelen lamba gücü kestirimlerini de kullanarak dağıtık bir algoritma yardımıyla yolda istenilen aydınlık seviyesine ulaşmak için gerekli lamba güçleri hesabını günceller ve komşu lambalarla paylaşır. Bu güncellemeler sonucunda, tüm akıllı lambalar istenilen aydınlık seviyesine ulaşmak için gerekli olan tüm lamba güçlerini belirler ve lamba gücünü ayarlayarak yolu istenildiği şekilde aydınlatabilir.



Şekil 1 Akıllı yol aydınlatma sisteminin işleyişi

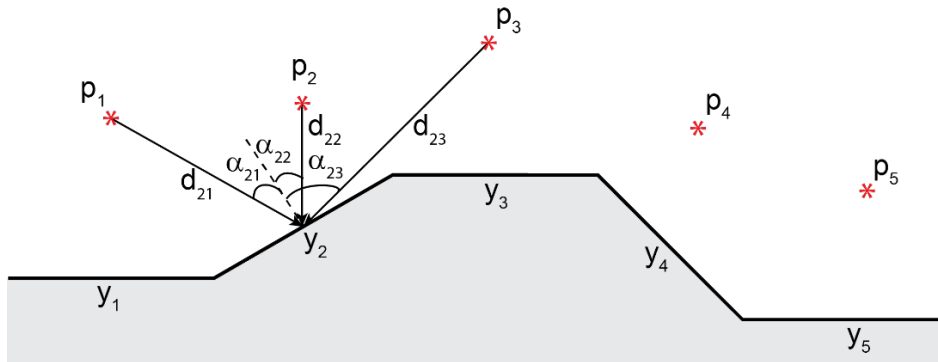
Makalenin geri kalanı şu şekilde düzenlenmiştir. Bölüm 2’de çok etmenli bir sistemde tanımlanmış akıllı yol aydınlatma modeli verilmiş ve bu problemin dağıtık olarak çözülebilmesi için kullanılacak bir algoritma tanıtılmıştır. Bu algoritmanın yol aydınlatma probleminin çözümündeki başarımı Bölüm 3’te detayları verilen benzetim çalışmaları ile gösterilmiştir. Bölüm 4’te ise, makalede elde edilen sonuçlar yorumlanarak gelecek çalışmalardan bahsedilmiştir.

## 2. Akıllı Yol Aydınlatma Modeli

Bu bölümde, birden fazla lamba ile aydınlatılan bir otoyola ait yol bölümlerinin aydınlık seviyelerinin lamba güçlerinin doğrusal bir fonksiyonu olduğu gösterilerek bu problemin çözülebilmesi için çok etmenli sistemler üzerinde tanımlanan dağıtık bir algoritmanın detayları verilmiştir.

### 2.1 Akıllı Yol Aydınlatma Sisteminin Çok Etmenli Ağ Modeli

Bu bölümde, bir yola ait farklı eğimlere sahip yol bölümlerinin birden fazla lamba tarafından aydınlatılmasının doğrusal bir denklem sistemi şeklinde modellenmesinden bahsedilmiştir. Bu amaçla, örnek bir yol aydınlatma sistemi Şekil 2’de gösterilmiştir. Şekilde yol bölümlerinin aydınlık seviyeleri  $y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) ve lamba güçleri  $p_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) olarak temsil edilmekte olup;  $\alpha_{ij}$  ifadesi  $j$ . lambadan çıkan ışığın  $i$ . yol bölümünün normali ile yaptığı açığı belirtmektedir.  $d_{ij}$  ise  $j$ . lamba ile  $i$ . yol bölümünün merkezi arasındaki mesafedir.



Şekil 2 Bir yol bölümünün birden fazla lamba ile aydınlatılması

Bu tanımlamalar kullanılarak,  $j$ . lambanın  $i$ . yol bölümünün aydınlık seviyesine katkısı

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{p_j \cos(\alpha_{ij})}{d_{ij}^2} & , \text{ eğer } j. \text{ lamba } i. \text{ yol bölümünü doğrudan aydınlatabiliyorsa} \\ 0 & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases} \quad (1)$$

olarak ifade edilebilir. Birden fazla lamba tarafından aydınlatılan  $i$ . yol bölümünün aydınlık seviyesi

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j \quad (2)$$

denklemleri ile ifade edilebilir. Yolların toplam aydınlık seviyeleri  $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$  ve lambaların güçleri  $p = [p_1, p_2, \dots, p_n]^T$  vektörleri tanımlanarak,

$$y = Ap \quad (3)$$

doğrusal denklemi elde edilir. Bu denklemde yer alan  $A = [a_{ij}]$ , elemanları negatif olmayan ve  $n \times n$  boyutlarında bir matristir. Yol aydınlatma probleminin çözülebilmesi için,  $y = Ap$  denklemini sağlayan

$$p^* = A^{-1}y \quad (4)$$

vektörünün hesaplanması gerekmektedir.

**Yorum 1:** Denklem 4'te yer alan  $p^*$  çözümünün hesaplanabilmesi için son 10 yıla kadar literatürdeki algoritmaların temel varsayımı  $A$  matrisinin tüm satırlarının bir merkezi işlemci tarafından biliniyor olmasıdır. Ancak yol aydınlatma probleminden de görüleceği gibi, bazı mühendislik uygulamalarında  $A$  matrisinin bazı satırları ve  $y$  vektörünün aynı satırlara karşılık gelen elemanları fiziksel olarak birbirinden çok uzak konumlarda ortaya çıkabilmektedir. Bu nedenle her bir yol bölümünün istenilen aydınlatma düzeyine sahip olabilmesi için gerekli olan lamba güçlerini belirleyebilme problemi, dağıtık olarak çok etmenli sistemler üzerinde tanımlanarak çözülebilir.

## 2.2 Dağıtık Çözüm Algoritması

Bölüm 1'de bahsedildiği üzere doğrusal denklem sistemlerinin çözümü konusunda son yıllarda çeşitli algoritmalar geliştirilmiştir. Bu algoritmalar, sürekli ya da ayrık zamanda tanımlı olmasına; başlangıç çözümünün yerel denklem sistemini sağlamak zorunda olup olmamasına ve çözüm olmadığı durumda en küçük kareler çözümünü elde edebiliyor olup olmamasına göre farklı sınıflara ayrılmaktadır. Bölüm 2.1'de açıklanan yol aydınlatma probleminin çok etmenli sistemler yardımıyla çözümü için gerekli tanımlar ve dağıtık algoritma bu bölümde verilmiştir.

Etmenler arası iletişimin iki yönlü olarak sağlandığı ve  $n > 1$  adet etmeden oluşan birçok etmenli sistemi ele alalım.  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  köşeler kümesi ve  $E \subset V \times V$  kenarlar kümesi olmak üzere, çok etmenli sistem  $G = (V, E)$  çizgesi ile temsil edilebilir. Eğer  $i$ . etmeden  $j$ . etmene bir bilgi akışı mevcut ise bu durumda  $(i, j) \in E$ 'dir ve  $i$ . etmen ile  $j$ . etmen komşu etmenlerdir. Bir  $i$  etmeninin komşular kümesi  $N_i = \{j : (j, i) \in E\}$  olarak tanımlanır ve  $i$ . etmeninin komşu sayısı  $|N_i|$  olarak ifade edilebilir. Eğer ağda bulunan her  $i$  ve  $j$  etmeni arasında doğrudan veya dolaylı bir iletişim mevcut ise, bu ağ çizgesine kuvvetli bağlı çizge adı verilir. Her bir aydınlatma lambasının gücünün bir işlem birimi tarafından kontrol edildiği ve işlem birimleri arasında kablolu iletişimin mevcut olduğu durumda, aydınlatma lambaları etmen olarak tanımlanarak yol aydınlatma problemi çok etmenli sistemde tanımlanabilmektedir.

Ağı temsil eden çizgenin kuvvetli bağlı olduğu ve ağdaki etmenlerin bildikleri  $y = Ap$  denkleminin alt kümelerinin birleşiminin  $y = Ap$  denkleminin eşit olduğu durumda, keyfi başlangıç vektörlerinden başlayarak doğrusal denklem sisteminin eşsiz çözümüne ulaşabildikleri dağıtık bir algoritma Wang ve ark. tarafından

$$p_i(k+1) = P_{null(A_i)} \sum_{j \in N_i} w_{ij} p_j(k) + A_i^T (A_i A_i^T)^{-1} y_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (5)$$

olarak önerilmiştir [12]. Burada  $p_i(k)$  değeri  $k$ . adımda  $i$ . etmenin çözüm vektörünü temsil ederken,  $w_{ij}$  parametresi  $j$ . etmenden  $i$ . etmene gelen çözüm vektörünün çarpıldığı katsayıdır ve

$$w_{ij} \begin{cases} > 0 & , \text{ eğer } (j, i) \in \mathcal{E} \text{ ise} \\ = 0 & , \text{ diğer durumlarda} \end{cases} \quad (6)$$

olarak tanımlanmaktadır. Bir  $i$  etmeninin komşu çözümlerini ağırlıklandırmak için kullandığı katsayılar

$$\sum_{j \in N_i} w_{ij} = 1 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (7)$$

denklemini sağlanacak şekilde seçilmelidir.  $A_i$  matrisi,  $i$ . etmen tarafından bilinen  $y_i = A_i p_i$  denkleminin katsayılar matrisidir.  $P_{null(A_i)}$  matrisi ise  $A_i$ 'nin sıfır uzayına iz düşüm matrisidir ve

$$P_{null(A_i)} = I - A_i^T (A_i A_i^T)^{-1} A_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (8)$$

denklemini ile hesaplanmaktadır [22]. Denklem 5'te verilen dağıtık algoritmanın sözde kod yapısı Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1 Kullanılan dağıtık algoritmanın sözde kod yapısı

---

```

for  $i = 1$  to  $n$ 
   $P_{null(A_i)} \leftarrow I - A_i^T (A_i A_i^T)^{-1} A_i$ 
   $p_i(0) \leftarrow n$  elemanlı rastgele bir vektör
  for each  $j \in N_i$ 
     $w_{ij} \leftarrow 1/|N_i|$ 
  end for
  for each  $j \in \{1, \dots, n\} \setminus N_i$ 
     $w_{ij} \leftarrow 0$ 
  end for
end for
for  $k = 0$  to  $k_{max}$ 
  for  $i = 1$  to  $n$ 
     $toplamlHata \leftarrow 0$ 
    for each  $j \in N_i$ 
       $p_j(k) \leftarrow$  komşu lamba  $j$ 'nin  $k$ . adımdaki çözümü
       $toplamlHata \leftarrow toplamlHata + w_{ij} p_j(k)$ 
    end for
     $p_i(k+1) \leftarrow P_{null(A_i)} \cdot toplamlHata + A_i^T (A_i A_i^T)^{-1} y_i$ 
  end for
end for

```

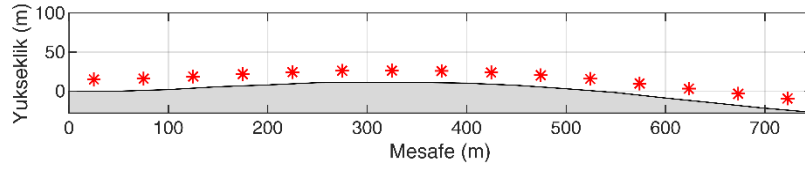
---

**Yorum 2:** Etmenlerin Denklem 5'te verilen algoritmayı kullanabilmesi için öncelikle  $P_{null(A_i)}$  matrisini hesaplamaları gerekmektedir. Yol aydınlatma probleminin doğası gereği,  $y = Ap$  denklem sisteminin her bir denklemini farklı bir fiziksel konumda ortaya çıkmaktadır ve etmenlerin bildikleri  $y_i = A_i p_i$  denklemlerinde bulunan  $A_i$  matrisleri tek satırdan oluşmaktadır. Bu nedenle  $A_i A_i^T$  sayıl bir değerdir ve  $P_{null(A_i)}$ 'nin hesabı için yüksek işlem gücü gerekmektedir.

### 3. Benzetim Çalışmaları

Bu bölümde, Bölüm 2.1'de detayları açıklanan yol aydınlatma probleminin Bölüm 2.2'deki algoritma ile çözümünü gösterebilmek için *GNU Octave* benzetim ortamında yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir [23]. Bu amaçla, 750 metre uzunluğunda ve (otoyol aydınlatma standartlarına uygun olarak) ellişer metre aralıklarla aydınlatılmak istenen bir otoyol ele alınmıştır. Benzetim çalışmaları için kullanılacak

olan yol bölümleri doğrusal olarak modellenmiş olup, eğimleri bir önceki yol eğiminden  $\pm\%3$ 'ten fazla değişmeyecek şekilde ve yol eğimi hiçbir zaman  $\pm\%6$ 'yı geçmeyecek şekilde rastgele oluşturulmuştur. Yol profili Şekil 3'te ve yol bölümlerine ait eğim değerleri Tablo 2'de verilmiştir.



Şekil 3 Oluşturulan örnek yol profili

Tablo 2 Benzetim çalışmalarında kullanılan yol bölümlerinin eğim değerleri

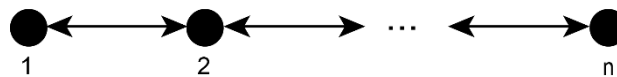
Yol bölümü	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Eğim (%)	0	0,53	-1,11	-1,80	-1,31	-2,79	-4,04	-3,34	-4,74	-2,80	0,09	1,47	0,54	1,04	-1,31

Her yol bölümü, yolun ortasına yerleştirilmiş ve standartlara uygun olarak 15 metre yükseklikteki bir aydınlatma direğinde bulunan bir lamba ile aydınlatılmak istendiği durumda, lambalar ve yol bölümlerinin orta noktaları arasındaki mesafelerin değerleri Tablo 3'teki gibi olmaktadır.

Tablo 3 Lambalar ile yol bölümlerinin orta noktaları arasındaki mesafeler (m)

Lamba	Yol bölümü														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	15,00	52,48	101,65	151,38	201,22	251,05	300,84	350,63	400,35	449,96	499,54	549,02	598,49	648,07	697,75
2	51,91	15,00	53,00	101,97	151,58	201,28	250,98	300,73	350,41	399,99	449,55	499,03	548,51	598,10	647,79
3	100,52	51,38	15,00	53,06	101,95	151,44	201,05	250,75	300,42	350,00	399,57	449,08	498,59	548,21	597,94
4	150,02	100,24	51,32	15,00	52,95	101,73	151,14	200,78	250,42	300,01	349,60	399,14	448,70	498,37	548,13
5	199,81	149,89	100,27	51,44	15,00	52,65	101,36	150,84	200,43	250,01	299,63	349,20	398,80	448,51	498,32
6	249,72	199,77	149,99	100,46	51,72	15,00	52,26	101,07	150,50	200,03	249,65	299,25	348,89	398,63	448,47
7	299,71	249,75	199,93	150,26	100,82	52,15	15,00	52,06	100,75	150,09	199,65	249,25	298,91	348,68	398,54
8	349,71	299,75	249,92	200,19	150,57	101,16	52,34	15,00	51,66	100,28	149,69	199,25	248,92	298,71	348,59
9	399,69	349,73	299,91	250,17	200,51	150,93	101,45	52,73	15,00	51,15	99,88	149,30	198,93	248,72	298,61
10	449,61	399,67	349,87	300,16	250,50	200,89	151,27	101,89	53,21	15,00	50,86	99,53	149,00	198,75	248,62
11	499,49	449,57	399,80	350,13	300,50	250,89	201,23	151,69	102,32	53,51	15,00	50,48	99,23	148,83	198,66
12	549,30	499,40	449,68	400,04	350,46	300,87	251,22	201,64	152,10	102,64	53,85	15,00	50,25	99,15	148,82
13	599,09	549,21	499,53	449,94	400,40	350,85	301,22	251,63	202,03	152,41	102,95	54,08	15,00	50,30	99,24
14	648,92	599,06	549,42	499,88	450,37	400,84	351,22	301,62	251,99	202,28	152,61	103,05	54,03	15,00	50,43
15	698,80	648,97	599,35	549,83	500,35	450,84	401,21	351,60	301,94	252,18	202,41	152,64	102,96	53,91	15,00

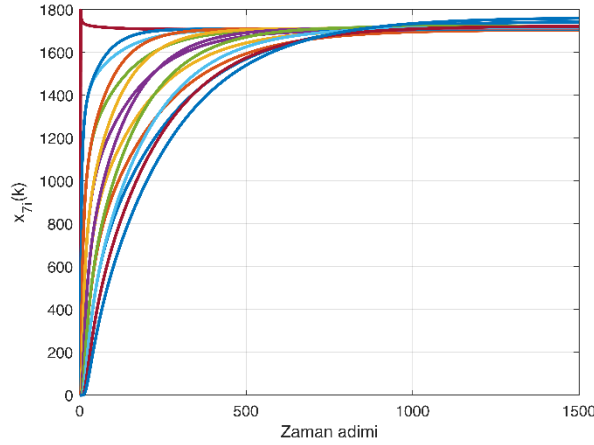
Lamba direklerine yerleştirilmiş olan, basit hesaplamalar yapabilen ve haberleşme yeteneğine sahip işlem birimleri vasıtasıyla, tüm yol bölümlerinin homojen olarak aydınlatılması amaçlanmaktadır. Benzetim çalışmalarında kablosuz haberleşme menzillerinin 50 ile 100 metre arasında olduğu varsayılmakta olup, her bir etmen yalnızca kendisine komşu olan etmenler ile haberleşebilmektedir. Bu durumda çok etmenli ağ, Şekil 4'te verilen çizge ile temsil edilebilir.



Şekil 4 Etmenlerin menzillerinin 50 ile 100 metre arası olduğu durumda etmenler arası iletişimi temsil eden çizge

Yol bölümlerinin tamamının 8 lux seviyesinde aydınlatılması istendiği durum için  $y = [8, \dots, 8]^T$  olarak seçilmiştir. Lambaların yol bölümlerini doğrudan aydınlatıp aydınlatmadığı benzetim ortamında

hesaplanarak  $A_i$  matrisleri oluşturulmuş ve etmenlerin başlangıç değerleri  $p_i(1) = [0, \dots, 0]^T$  olarak (yanmayan lamba) ve ağırlık katsayıları  $w_{ij} = 1/|N_i|$  şeklinde seçilerek Denklem 5'te verilen algoritma kullanılarak dağıtık olarak çözüm elde edilmiştir. Örnek bir etmenin (7. etmen) çözümünün zamana bağlı değişimi Şekil 5'teki gibi olmaktadır. Şekilden de görüleceği gibi, çözüm fonksiyonu denklem sisteminin eşsiz çözümü olan ve Tablo 4'te verilen değerlere asimptotik olarak yakınsamıştır.



Şekil 5 Yedinci etmenin (lambanın), istenilen aydınlatma seviyelerine ulaşılması için gerekli lamba gücü seviyelerini dağıtık olarak hesabı

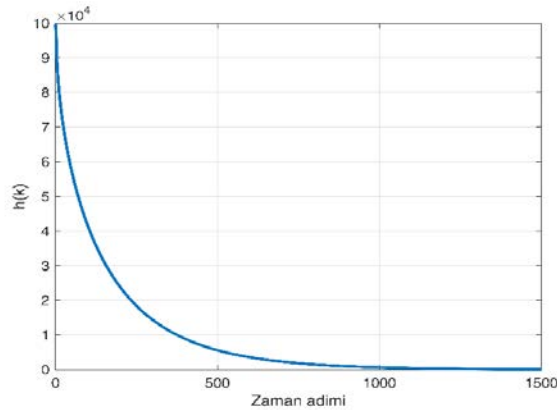
Tablo 4 Benzetim çalışmalarında incelenen yol aydınlatma probleminin eşsiz çözümü

Yol bölümü	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Lamba gücü	1746	1706	1709	1707	1710	1709	1708	1710	1712	1713	1714	1722	1719	1723	1764

Tüm etmenlerin denklem sistemini çözdüğünü göstermek amacıyla, etmenlerin çözümlerindeki hataların normlarının toplamını ifade eden

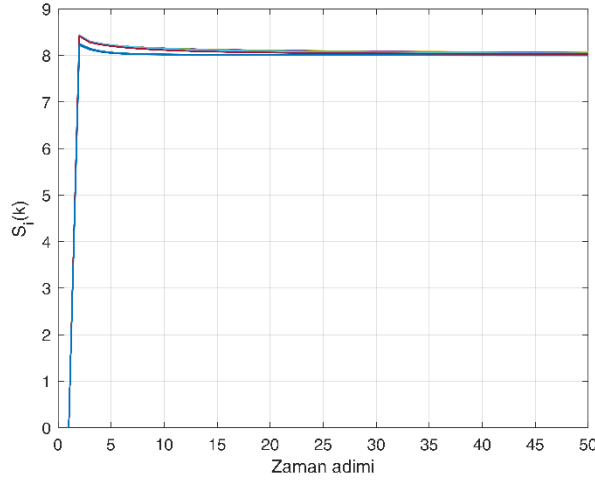
$$h(k) = \sum_{i=1}^n \|p_i(k) - p^*\| \quad (9)$$

fonksiyonunun zamanla değişimi Şekil 6'da verilmiştir.  $h(k)$ 'nin asimptotik olarak sıfıra yakınsaması tüm etmenlerin denklem sistemini çözdüğünü, yani istenilen yol aydınlık seviyelerine ulaşabilmek için her bir lambanın sahip olması gereken güç değerini belirleyebildiğini göstermektedir. Her bir etmen, bağlı olduğu lambanın gücünü bu çözümden elde ettiği değere göre ayarlandığında homojen yol aydınlatması sağlanabilmektedir.



Şekil 6 Etmenlerin gerekli lamba güçleri seviyesini hesabındaki toplam hata normlarının ( $h(k)$ ) zamanla değişimi

Etmenler denklem sistemini yinelemeli olarak çözerken, her zaman adımında elde ettikleri çözümleri kullanarak lamba güçlerini ayarladığında, yol bölümlerinin aydınlık seviyesinin zamana bağlı değişimi Şekil 7’de gösterildiği gibi olmaktadır ( $S_i(k)$ ,  $i$ . yol bölümünün  $k$ . zaman adımındaki aydınlık seviyesini temsil etmektedir).



Şekil 7 Etmenler elde ettikleri çözüm vektörlerini kullanarak lamba güçlerini ayarladıklarında, yol aydınlık seviyelerinin zamana bağlı değişimi

**Yorum 3:** Şekil 7’den de görüleceği gibi istenilen aydınlık seviyesine ulaşmak için gerekli süre, Şekil 6’da gösterilen denklem sisteminin tamamının çözümü için gerekli süreden çok daha azdır. Bunun nedeni,  $i$ . etmenin denklem sistemini çözerken elde ettiği çözüm vektörünün  $i$ . elemanının ( $i$ . lambanın gücünün) gerçek çözümdeki değerine diğer elemanlardan çok daha hızlı yakınsamasıdır.

#### 4. Sonuçlar ve Gelecek Çalışmalar

Otoyolun ellışer metre aralıklarla aydınlatıldığı ve yol eğiminin ellışer metre aralıklarla değiştiği varsayımı altında, yolun homojen olarak aydınlatılabilmesi için gerekli olan lamba güçlerinin belirlenmesi problemi doğrusal bir denklem sistemi şeklinde modellenmiştir. Her bir lambanın, bağlı oldukları ve kablosuz iletişim yeteneğine sahip basit işlem birimleri vasıtası ile güç ayarı yapabildiği sistem için, işlem birimlerinin kendilerine yakın olan diğer işlem birimleri ile bilgi paylaşımı yaparak tüm denklem sistemini (dolayısı ile gerekli olan tüm lamba güçlerini) dağıttık bir algoritma kullanarak çözebildikleri gösterilmiştir. Bulunan bu çözümler işlem birimleri tarafından kullanılarak lamba güçleri ayarlandığında, otoyolda istenilen aydınlatma seviyesine ulaşmanın mümkün olduğu yapılan benzetim çalışmaları ile doğrulanmıştır. Bulunan lamba gücü değerlerinin her lamba için farklı çıkması, homojen yol aydınlatması için lambaların farklı güçlerde aydınlatma sağlaması gerektiğini göstermektedir. Gelecek çalışmalarda, otoyollarda daha yaygın olarak kullanılan refüjden çift konsollu aydınlatma sistemi için problem modelinin geliştirilerek, uygulamaya yönelik pratik sonuçlar elde edilmesi planlanmaktadır.

#### Teşekkür

Bu çalışma TÜBİTAK Proje No: 117E204 tarafından desteklenmiştir.

#### Referanslar

- [1] H. Jin, S. Jin, L. Chen, S. Cen and K. Yuan, "Research on the Lighting Performance of LED Street Lights With Different Color Temperatures," *IEEE Photonics Journal*, vol. 7, no. 6, pp. 1-9, 2015.



- [2] C. Sun, X. Lee, I. Moreno, C. Lee, Y. Yu, T. Yang and T. Chung, "Design of LED Street Lighting Adapted for Free-Form Roads," *IEEE Photonics Journal*, vol. 9, no. 1, pp. 1-13, 2017.
- [3] W. Hackbusch, *Iterative Solution of Large Sparse Systems of Equations*, New York, USA:Springer-Verlag, 1994.
- [4] M. Krstic and A. Smyshlyaev, *Boundary Control of PDEs: A Course on Backstepping Designs*, Philadelphia, USA:SIAM Publishing, 2008.
- [5] J. Anderson, *Computational Fluid Dynamics: The Basics With Applications*, New York, USA:Mc-Graw-Hill Education, 1995.
- [6] B. Carpentieri, I. Duff, L. Giraud and M. Magolu monga Made, "Sparse Symmetric Preconditioners for Dense Linear Systems in Electromagnetism," *Numerical Linear Algebra with Applications*, vol. 11, pp. 753–771, 2004.
- [7] F. Pasqualetti, R. Carli and F. Bullo, "Distributed Estimation via Iterative Projections With Application to Power Network Monitoring," *Automatica*, vol. 48, no. 5, pp. 747-758, 2012.
- [8] D. Silvestre, J. Hespanha and C. Silvestre, "A Pagerank Algorithm Based on Asynchronous Gauss–Seidel Iterations," *Proc. - 2018 American Control Conference*, pp. 484–489, 2018.
- [9] S. Mou, J. Liu and A.S. Morse, "A Distributed Algorithm for Solving a Linear Algebraic Equation," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 60, no. 11, pp. 2863–2878, 2015.
- [10] J. Liu, S. Mou and A.S. Morse, "Asynchronous Distributed Algorithms for Solving Linear Algebraic Equations," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 63, no. 2, pp. 372–385, 2018.
- [11] J. Liu, A.S. Morse, A. Nedic and T. Başar, "Exponential Convergence of a Distributed Algorithm for Solving Linear Algebraic Equations," *Automatica*, vol. 83, pp. 37–46, 2017.
- [12] X. Wang, J. Zhou, S. Mou and M.J. Corless, "A Distributed Linear Equation Solver for Least Square Solutions," *Proc. - 56th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 5955–5960, 2017.
- [13] J. Liu, X. Gao and T. Başar, "A Communication-Efficient Distributed Algorithm for Solving Linear Algebraic Equations," *Proc. - 7th International Conference on Network Games, Control and Optimization*, pp. 62–69, 2014.
- [14] P. Wang, W. Ren and Z. Duan, "Distributed Algorithm to Solve a System of Linear Equations With Unique or Multiple Solutions From Arbitrary Initializations," *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, vol. 6, no. 1, pp. 82-93, 2018.
- [15] X. Wang, S. Mou and D. Sun, "Improvement of a Distributed Algorithm for Solving Linear Equations," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 64, no. 4, pp. 3113–3117, 2017.
- [16] S. Mou, Z. Lin, L. Wang, D. Fullmer and A.S. Morse, "A Distributed Algorithm for Efficiently

- Solving Linear Equations and its Applications," *Systems & Control Letters*, vol. 91, pp. 21–27, 2016.
- [17] B.D.O. Anderson, S. Mou, A.S. Morse and U. Helmke, "Decentralized Gradient Algorithm for Solution of a Linear Equation," *Numerical Algebra, Control & Optimization*, vol. 6, no. 3, pp. 319-328, 2016.
- [18] G. Shi, B.D.O. Anderson and U. Helmke, "Network Flows That Solve Linear Equations," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no. 6, pp. 2659-2674, 2017.
- [19] M. Yang and C.Y. Tang, "A Distributed Algorithm for Solving General Linear Equations Over Networks," *Proc. - 54th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3580–3585, 2015.
- [20] J. Liu, X. Chen, T. Başar ve A. Nedic , "A Continuous-Time Distributed Algorithm for Solving Linear Equations," *Proc. - 2016 American Control Conference*, pp. 5551–5556, 2016.
- [21] Y. Liu, C. Lageman, B.D.O. Anderson and G. Shi, "An Arrow–Hurwicz–Uzawa Type Flow as Least Squares Solver for Network Linear Equations," *Automatica*, vol. 100, pp. 187-193, 2019.
- [22] P. Wang, S. Mou, J. Lian and W. Ren, "Solving a System of Linear Equations: From Centralized to Distributed Algorithms," *Annual Reviews in Control*, vol. 47, pp. 306-322, 2019.
- [23] GNU Octave, "GNU Octave," 2020. [Online]. Available: <https://www.gnu.org/software/octave/>. [Accessed: 15-May-2020].